

# Элементы теории алгоритмов

Алгоритм – точный набор инструкций для исполнителя, который приводит к решению задачи за конечное время

# АЛГОРИТМ



Евклид

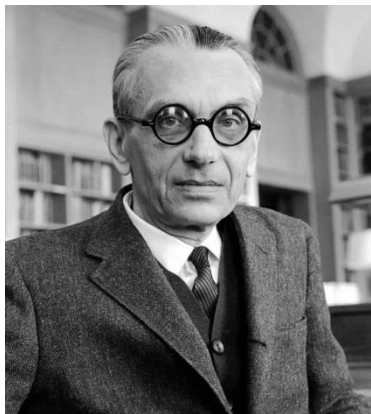


Аль-Хорезми



Г.В.Лейбниц

**!!!Некоторые задачи алгоритмически неразрешимы**

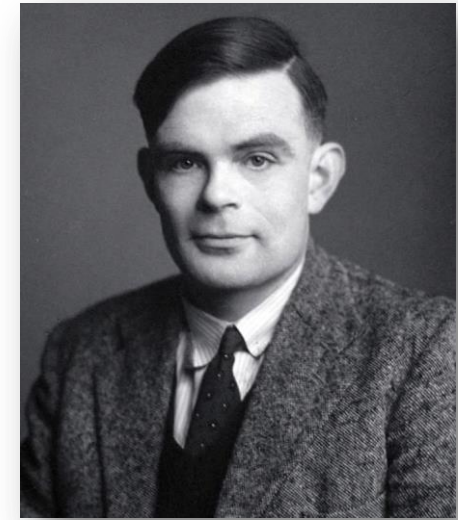
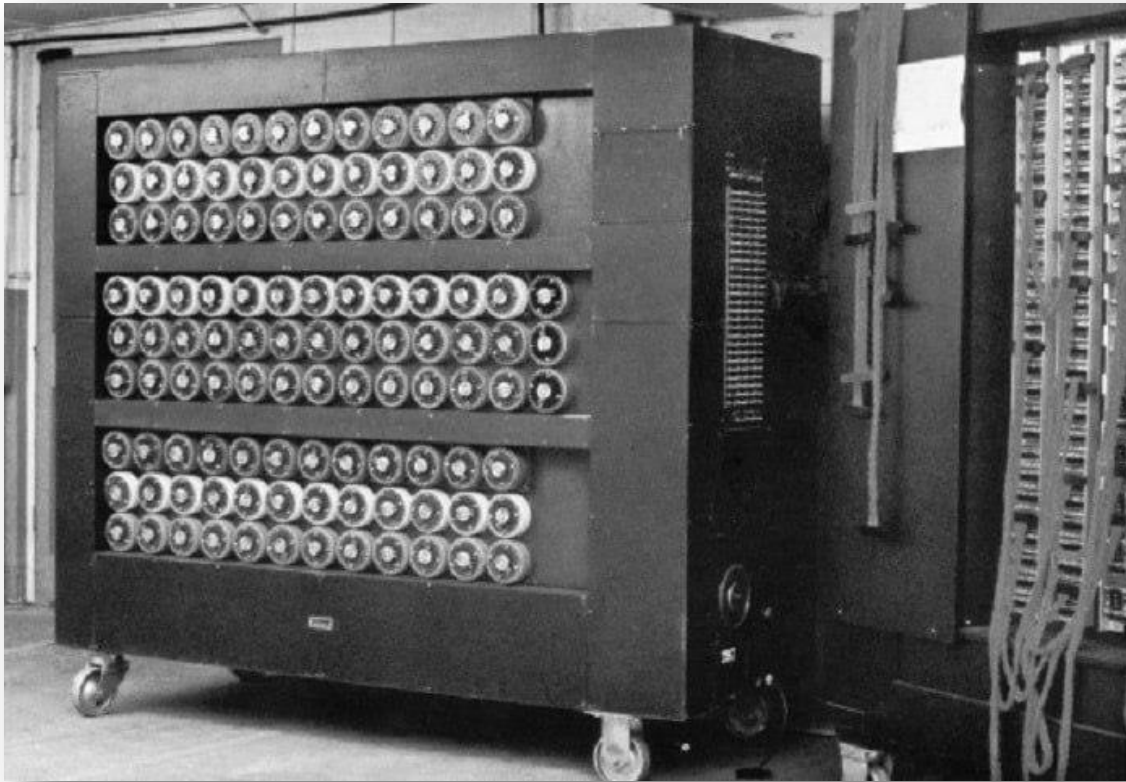


К.Ф.Гёдель

## ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ (30-ые года XX века)

- Доказательство алгоритмической неразрешимости задач
- Анализ сложности алгоритмов
- Сравнительной оценкой качества алгоритмов

# Универсальный исполнитель - Машина Тьюринга



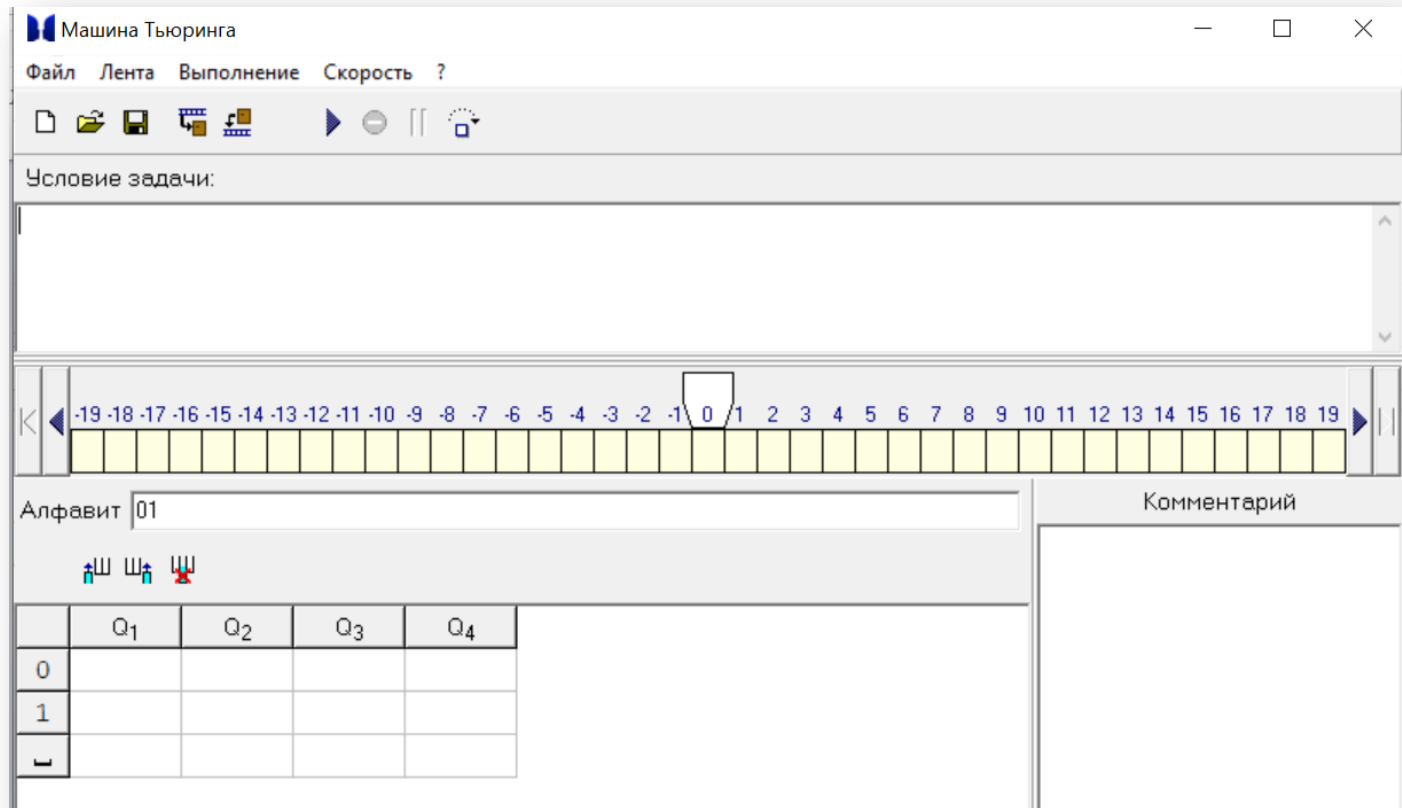
**Алан Тьюринг**  
23 июня 1912 — 7 июня 1954)  
английский математик, логик и  
криптограф.

Машина Тьюринга состоит из:

- Бесконечной ленты, разделенной на ячейки
- Каретки, читающей и записывающей головки
- Программируемого автомата

# Тренажер «Машина Тьюринга»

Тренажёр «Машина Тьюринга» — это учебная модель универсального исполнителя. Согласно тезису Тьюринга, любой алгоритм может быть записан в виде программы для машины Тьюринга.

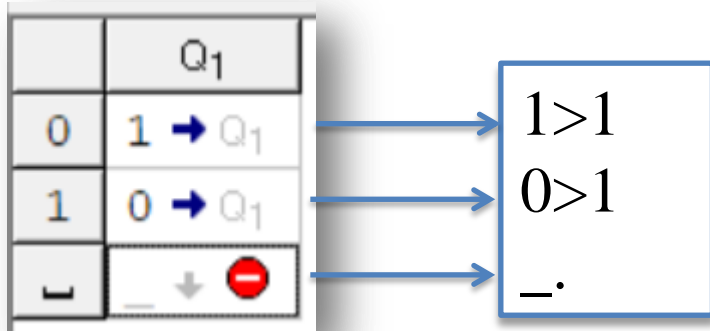


**Машина Тьюринга** — это автомат, который управляется таблицей. Строки в таблице соответствуют символам выбранного алфавита  $A$ , а столбцы — состояниям автомата  $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_M\}$

# Составление алгоритмов на машине Тьюринга

Команда	Действие команды
>	Переместить каретку на 1 ячейку вправо
<	Переместить каретку на 1 ячейку влево
-	Стереть
.	Остановить машину

**Задача.** Заменить в двоичной записи числа все нули на единицы и все единицы на нули. Каретка стоит над первой цифрой.



# Составление алгоритмов на машине Тьюринга

Заменить в двоичной записи числа все нули на единицы и все единицы на нули. Каретка стоит слева от цифры, в какой позиции неизвестно.

Замена 0 на 1, 1 на 0.  
Перевод каретки  
вправо

	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>
0	1 → Q <sub>2</sub>	1 → Q <sub>2</sub>
1	0 → Q <sub>2</sub>	0 → Q <sub>2</sub>
␣	␣ → Q <sub>1</sub>	␣ → ⓧ

Замена 0 на 1, 1 на 0.  
Перевод каретки  
вправо

Перевод каретки с  
пустой ячейки вправо

Остановка машины

# Составление алгоритмов на машине Тьюринга

1. К введенному десятичному числу прибавить 2 (3,4). Каретка стоит на первой цифре числа.

	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>
0	0 → Q <sub>1</sub>	2 ↓ ⊖	1 ↓ ⊖
1	1 → Q <sub>1</sub>	3 ↓ ⊖	2 ↓ ⊖
2	2 → Q <sub>1</sub>	4 ↓ ⊖	3 ↓ ⊖
3	3 → Q <sub>1</sub>	5 ↓ ⊖	4 ↓ ⊖
4	4 → Q <sub>1</sub>	6 ↓ ⊖	5 ↓ ⊖
5	5 → Q <sub>1</sub>	7 ↓ ⊖	6 ↓ ⊖
6	6 → Q <sub>1</sub>	8 ↓ ⊖	7 ↓ ⊖
7	7 → Q <sub>1</sub>	9 ↓ ⊖	8 ↓ ⊖
8	8 → Q <sub>1</sub>	0 ← Q <sub>3</sub>	9 ↓ ⊖
9	9 → Q <sub>1</sub>	1 ← Q <sub>3</sub>	0 ↓ ⊖
␣	␣ ← Q <sub>2</sub>	␣ ← Q <sub>2</sub>	

+2

	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>
0	0 → Q <sub>1</sub>	3 ↓ ⊖	1 ↓ ⊖
1	1 → Q <sub>1</sub>	4 ↓ ⊖	2 ↓ ⊖
2	2 → Q <sub>1</sub>	5 ↓ ⊖	3 ↓ ⊖
3	3 → Q <sub>1</sub>	6 ↓ ⊖	4 ↓ ⊖
4	4 → Q <sub>1</sub>	7 ↓ ⊖	5 ↓ ⊖
5	5 → Q <sub>1</sub>	8 ↓ ⊖	6 ↓ ⊖
6	6 → Q <sub>1</sub>	9 ↓ ⊖	7 ↓ ⊖
7	7 → Q <sub>1</sub>	0 ↓ ⊖	8 ↓ ⊖
8	8 → Q <sub>1</sub>	1 ← Q <sub>3</sub>	9 ↓ ⊖
9	9 → Q <sub>1</sub>	2 ← Q <sub>3</sub>	0 ↓ ⊖
␣	␣ ← Q <sub>2</sub>	␣ ← Q <sub>2</sub>	



+3

	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>
0	0 → Q <sub>1</sub>	4 ↓ ⊖	1 ↓ ⊖
1	1 → Q <sub>1</sub>	5 ↓ ⊖	2 ↓ ⊖
2	2 → Q <sub>1</sub>	6 ↓ ⊖	3 ↓ ⊖
3	3 → Q <sub>1</sub>	7 ↓ ⊖	4 ↓ ⊖
4	4 → Q <sub>1</sub>	8 ↓ ⊖	5 ↓ ⊖
5	5 → Q <sub>1</sub>	9 ↓ ⊖	6 ↓ ⊖
6	6 → Q <sub>1</sub>	0 ↓ ⊖	7 ↓ ⊖
7	7 → Q <sub>1</sub>	1 ↓ ⊖	8 ↓ ⊖
8	8 → Q <sub>1</sub>	2 ← Q <sub>3</sub>	9 ↓ ⊖
9	9 → Q <sub>1</sub>	3 ← Q <sub>3</sub>	0 ↓ ⊖
␣	␣ ← Q <sub>2</sub>	␣ ← Q <sub>2</sub>	

+4

# Составление алгоритмов на машине Тьюринга


Сортировка цепочки из букв "а" и "б" так, чтобы сначала стоял все буквы "а", а потом - все буквы "б". Каретка стоит над строкой.

	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>	Q <sub>5</sub>
а	а ← Q <sub>1</sub>	а → Q <sub>2</sub>	б ← Q <sub>4</sub>	а → Q <sub>5</sub>	
б	б ← Q <sub>1</sub>	б → Q <sub>3</sub>	б → Q <sub>3</sub>	б ← Q <sub>4</sub>	а ↓ Q <sub>2</sub>
␣	␣ → Q <sub>2</sub>	␣ ↓ 	␣ ↓ 	␣ → Q <sub>5</sub>	

- Q<sub>1</sub> - ищем левый край строки
- Q<sub>2</sub> - идем по цепочке букв "а"
- Q<sub>3</sub> - идем по цепочке букв "б"
- Q<sub>4</sub> - ищем влево конец цепочки букв "б"
- Q<sub>5</sub> - меняем крайнюю левую букву на "а"

# Составление алгоритмов на машине Тьюринга


Удалить все вхождения символа 'a'. Каретка находится на первом символе слова.

	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>	Q <sub>5</sub>
a	a → Q <sub>1</sub>	a ← Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>3</sub>	a → Q <sub>4</sub>	a → Q <sub>5</sub>
b	b → Q <sub>1</sub>	b ← Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>4</sub>	b → Q <sub>4</sub>	b → Q <sub>5</sub>
c	c → Q <sub>1</sub>	c ← Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>5</sub>	c → Q <sub>4</sub>	c → Q <sub>5</sub>
=		= ← Q <sub>2</sub>	_ → 	= → Q <sub>4</sub>	= → Q <sub>5</sub>
␣	= ↓ Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>3</sub>		b ↓ Q <sub>2</sub>	c ↓ Q <sub>2</sub>

- Q<sub>1</sub> - записать справа знак =
- Q<sub>2</sub> - возврат к первому символу
- Q<sub>3</sub> - анализ и удаление
- Q<sub>4</sub> - запись 'b' справа, возврат налево (в цикл)
- Q<sub>5</sub> - запись 'c' справа, возврат налево (в цикл)

# Составление алгоритмов на машине Тьюринга

Удалить все вхождения символа 'a'. Каретка находится на первом символе слова.

	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>	Q <sub>5</sub>
a	a → Q <sub>1</sub>	a ← Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>3</sub>	a → Q <sub>4</sub>	a → Q <sub>5</sub>
b	b → Q <sub>1</sub>	b ← Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>4</sub>	b → Q <sub>4</sub>	b → Q <sub>5</sub>
c	c → Q <sub>1</sub>	c ← Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>5</sub>	c → Q <sub>4</sub>	c → Q <sub>5</sub>
=		= ← Q <sub>2</sub>	_ → 	= → Q <sub>4</sub>	= → Q <sub>5</sub>
␣	= ↓ Q <sub>2</sub>	_ → Q <sub>3</sub>		b ↓ Q <sub>2</sub>	c ↓ Q <sub>2</sub>

- Q<sub>1</sub> - записать справа знак =
- Q<sub>2</sub> - возврат к первому символу
- Q<sub>3</sub> - анализ и удаление
- Q<sub>4</sub> - запись 'b' справа, возврат налево (в цикл)
- Q<sub>5</sub> - запись 'c' справа, возврат налево (в цикл)

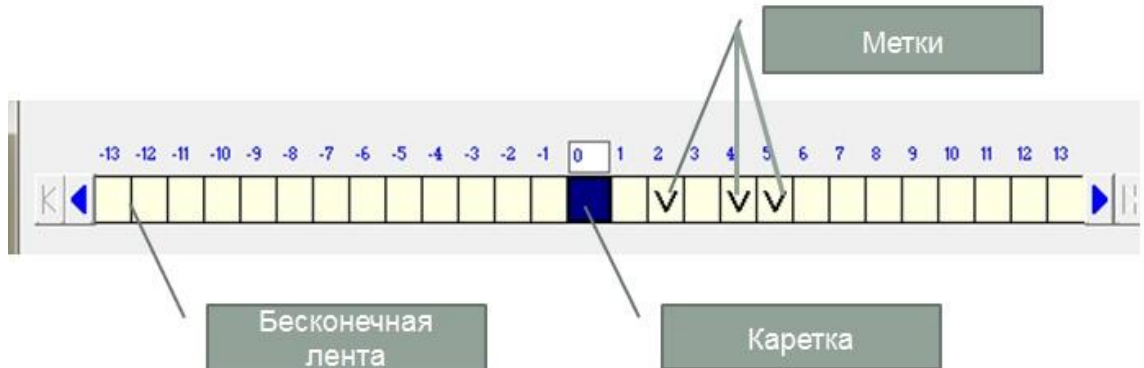
# Машина Поста



**Эмиль Пост**  
11.02.1897 — 21.04.1954  
английский математик и логик

Машина Поста работает с двоичным алфавитом и несколько проще в своем «устройстве».

Машина Поста абстрактное устройство.



# Машина Поста

Команда	Действие команды
>	Переместить каретку на 1 ячейку вправо
<	Переместить каретку на 1 ячейку влево
0	Стереть метку в рабочей ячейке
1	Поставить метку в рабочей ячейке
? n, m	Если в рабочей ячейке нет метки, то перейти к n, иначе перейти к m
!	Остановить машину

К ← 1 -30 -29 -28 -27 -26 -25 -24 -23 -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

	Команда	Переход	Комментарий
	Команда	Переход	Комментарий
1	1	2	
2	>	3	
3	1	4	
4	!		
5			

# Задачи «Машина Поста»

1. Стереть 3 метки справа от каретки. Каретка на первой метке
2. Стереть метки, стоящие в ячейках с четными номерами. Заполнено 5 ячеек.
3. Стереть все метки справа от каретки. Количество меток неизвестно
4. Стереть все метки справа от каретки. Расположение массива и количество меток неизвестно.

	Команда	Переход
1	0	2
2	>	3
3	0	4
4	>	5
5	0	6
6	!	

	Команда	Переход
1	>	2
2	0	3
3	>	4
4	?	5, 2
5	!	

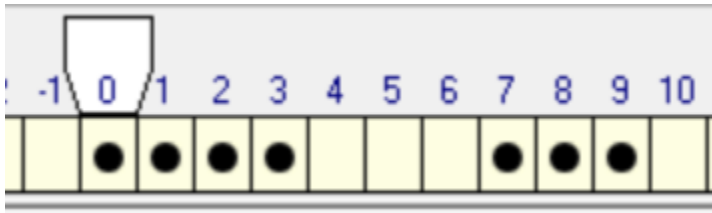
	Команда	Переход
1	>	2
2	0	3
3	>	4
4	>	5
5	0	6
6	>	7
7	>	8
8	!	

	Команда	Переход
1	>	2
2	?	1, 3
3	0	4
4	>	5
5	?	6, 3
6	!	

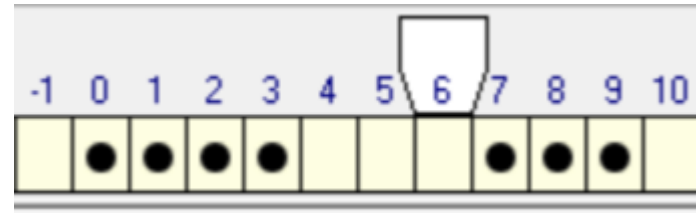
# Задачи «Машина Поста»

1. На ленте находится два массива меток. Каретка обозревает крайнюю левую метку. Перевести каретку на крайнюю правую пустую ячейку между массивами меток.

Дано:



Надо:

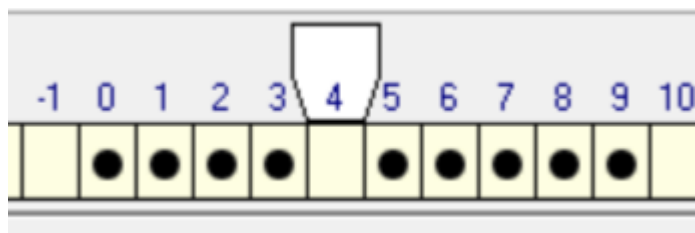


	Команда	Переход
1	?	3, 2
2	>	1
3	?	4, 5
4	>	3
5	<	6
6	!	

# Задачи «Машина Поста»

1. На ленте находятся два массива меток, разделенных пустой ячейкой. Напишите программу перемещения каретки сначала к крайней правой метке, а затем к крайней левой метке. В начальном положении каретка обозревает пустую ячейку между массивами.

Дано:

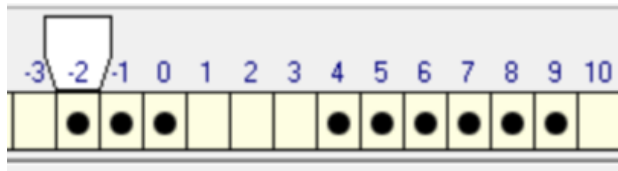


	Команда	Переход
1	>	2
2	?	3, 1
3	<	4
4	?	5, 3
5	<	6
6	?	7, 5
7	!	

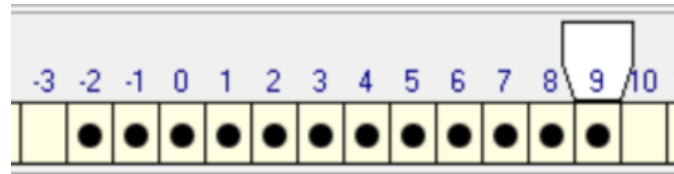
# Задачи «Машина Поста»

1. Заполнить пустые ячейки между двумя массивами меток. Каретка находится под крайней левой меткой.

Дано:



Надо:

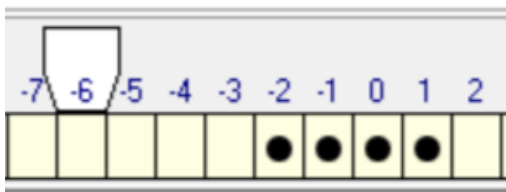


	Команда	Переход
1	?	3, 2
2	>	1
3	?	4, 6
4	1	5
5	>	3
6	?	8, 7
7	>	6
8	<	9
9	!	

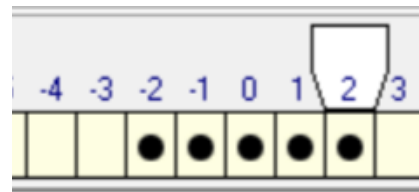
# Задачи «Машина Поста»

1. На некотором расстоянии справа от каретки, стоящей под пустой клеткой, находится непрерывный массив меток. Требуется присоединить к правому концу массива одну метку.

Дано:



Надо:

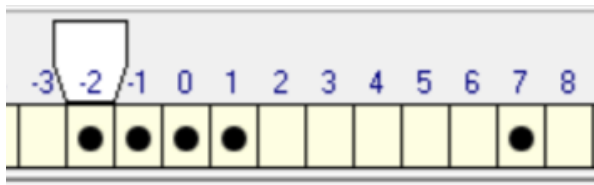


	Команда	Переход
1	?	2, 3
2	>	1
3	?	5, 4
4	>	3
5	1	5
6	!	

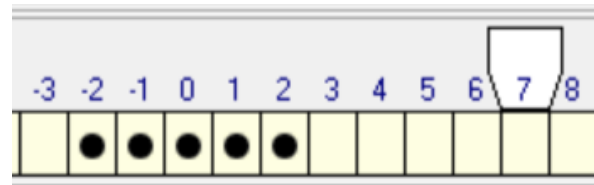
# Задачи «Машина Поста»

1. На ленте имеется массив меток. Каретка обозревает крайнюю левую отметку. Справа от данного массива на расстоянии находится еще одна метка. Составьте программу, “присоединяющую” эту метку к исходному массиву.

Дано:



Надо:

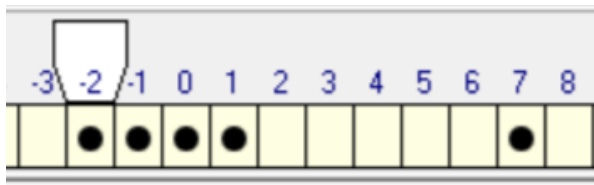


	Команда	Переход
1	?	3, 2
2	>	1
3	1	4
4	>	5
5	?	6, 7
6	>	5
7	0	8
8	!	

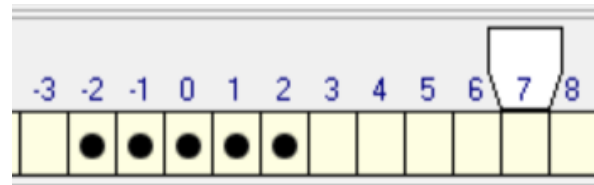
# Задачи «Машина Поста»

1. На ленте имеется массив меток. Каретка обозревает крайнюю левую отметку. Справа от данного массива на расстоянии находится еще одна метка. Составьте программу, “присоединяющую” эту метку к исходному массиву.

Дано:



Надо:

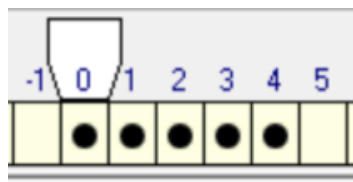
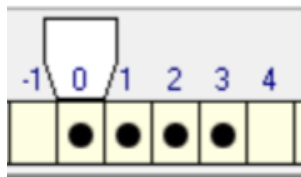


	Команда	Переход
1	?	3, 2
2	>	1
3	1	4
4	>	5
5	?	6, 7
6	>	5
7	0	8
8	!	

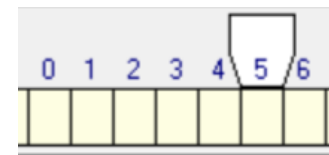
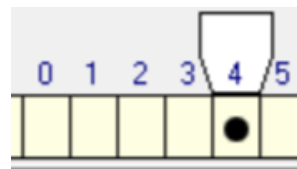
# Задачи «Машина Поста»

Определить количество меток. Если оно четное, то вывести 1 метку (а все остальные стереть). Если нечетное, то удалить все метки. В начальный момент каретка стоит над первой слева меткой.

Дано:



Надо:



	Команда	Переход	к
1	0	2	
2	>	3	
3	?	8, 4	
4	0	5	
5	>	6	
6	?	7, 1	
7	1	8	
8	.		

# Нормальные алгорифмы Маркова



**Андрей Андреевич Марков**  
22.09.1903 — 11.10.1979  
Советский математик

**Нормальные алгорифмы Маркова (НАМ)**  
– это строгая математическая форма записи алгоритмов обработки символьных строк, которую можно использовать для доказательства разрешимости и неразрешимости различных задач.

!!! В отличие от машин Тьюринга и Поста НАМ – это «чистый» алгоритм, который не связан ни с каким «аппаратным обеспечением» (лентой, кареткой и т.п.)

**ПРИМЕР.** Пусть алфавит НАМ это русские буквы и задана система подстановок:

а → н  
ух → ло  
м → с

Рабочая строка муха

Система подстановок:

	Образец		Замена	Комментарий
1	а	→	н	
2	ух	→	ло	
3	м	→	с	

# Задачи на составление НАМ Маркова

1. В некоторой последовательности символов состоящей из букв А,В,С, заменить А на С, а В на D.
2. В слове «abbbcaa» заменить «bbb» на одну букву «b», то есть получить строку «abca».
3. В строке 101111001111 удалить все 0, а затем заменить 111 на 222.

Рабочая строка `АВСВАВАВСВАВАВСВВАВАВАВ`

Система подстановок:

	Образец	Замена
1	А	С
2	В	D

Рабочая строка `abbbcaa`

Система подстановок:

	Образец	Замена
1	aa	a
2	bb	b
3	cc	c
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Рабочая строка `101111001111`




Система подстановок:

	Образец	Замена
1	0	
2	111	222
3		

# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A = \{a, b, c, d\}$ . В слове  $P$  требуется удалить все вхождения символа  $c$ , а затем заменить все вхождения под слова  $bb$  на  $ddd$



**Например:  $abbcabbca \rightarrow adddaddda$**

Рабочая строка		abbcabbca		
Система подстановок:				
		Образец		Замена
	1	c	→	
	2	bb	→	ddd
	3		→	

# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A=\{a,b\}$ . Преобразовать слово  $P$  так, чтобы в его начале оказались все символы  $a$ , а в конце – все символы  $b$ .




**Например: babba  $\rightarrow$  aabbb**

Рабочая строка		babba		
Система подстановок:				
		Образец		Замена
	1	ba	$\rightarrow$	ab
	2		$\rightarrow$	

# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A=\{a,b\}$ . Удалить из непустого слова  $P$  его первый символ. Пустое слово не менять.

Например: **bbaba**  $\rightarrow$  **baba**

Рабочая строка		bbaba			
Система подстановок:					
		Образец		Замена	
	1	*a	$\rightarrow$	.	
	2	*b	$\rightarrow$	.	
	3		$\rightarrow$	*	






# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A=\{0,1,2,3\}$ . Пусть  $P$  – непустое слово. Трактуя его как запись неотрицательного целого числа в четверичной системе счисления, требуется получить запись этого же числа, но в двоичной системе.

**Например: 0123 → 00011011**

Рабочая строка 0123

Система подстановок:

		Образец		Замена
	1	*0	→	00*
	2	*1	→	01*
	3	*2	→	10*
	4	*3	→	11*
	5	*	→	.
	6		→	*






# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A=\{a,b\}$ . Требуется приписать символ **a** к концу слова  $P$

**Например:  $bbab \rightarrow bbaba$**

Рабочая строка **bbab**








Система подстановок:

		Образец		Замена
	1	<b>*b</b>	<b>→</b>	<b>b*</b>
	2	<b>*a</b>	<b>→</b>	<b>a*</b>
	3	<b>*</b>	<b>→</b>	<b>a.</b>
	4		<b>→</b>	<b>*</b>
	5		<b>→</b>	

# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A=\{a,b\}$ . В слове  $P$  заменить на  $aa$  последнее вхождение символа  $a$ , если такое есть.






Например:  $bababb \rightarrow babaabb$

Рабочая строка		bababb		
Система подстановок:				
		Образец		Замена
 	1	*a	→	a*
 	2	*b	→	b*
	3	*	→	#
	4	b#	→	#b
	5	a#	→	aa.
	6		→	*

# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A=\{a,b\}$ . Перенести в конец непустого слова  $P$  его первый символ. Пустое слово не менять

**Например: bbaba  $\rightarrow$  babab**

Рабочая строка		bbaba		
Система подстановок:				
		Образец		Замена
	1	*aa	$\rightarrow$	a*a
	2	*bb	$\rightarrow$	b*b
	3	*ba	$\rightarrow$	a*b
	4	*ab	$\rightarrow$	b*a
	5	*	$\rightarrow$	.
	6		$\rightarrow$	*

# Задачи на составление НАМ Маркова

1.  $A = \{a, b\}$ . Удвоить слово  $P$ , т.е. приписать к  $P$  (слева или справа) его копию.

**Например:  $abb \rightarrow abbabb$**

Рабочая строка `abb`

Система подстановок:

		Образец		Замена
	1	*a	→	aA*
	2	*b	→	bB*
	3	*	→	#
	4	Aa	→	aA
	5	Ab	→	bA
	6	Ba	→	aB
	7	Bb	→	bB
	8	A#	→	#a
	9	B#	→	#b
	10	#	→	.
	11		→	*